# MTH 291 Skills #7 Key



1a. $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad (1-\lambda)(5-\lambda)-12=0 \quad \lambda^2-6\lambda+5-12=0$

$\lambda^2-6\lambda-7=0$

$(\lambda-7)(\lambda+1)=0$

$\lambda=7, \lambda=-1$

$\lambda=-1$

$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad 2x_1+6x_2=0 \quad x_1=-3x_2 \quad \vec{v}_1=\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda=7$

$\begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad 2x_1-2x_2=0 \quad x_1=x_2 \quad \vec{v}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad (-1-\lambda)(1-\lambda)-3=0 \quad \lambda^2-1-3=0$

$\lambda^2-4=0$

$(\lambda-2)(\lambda+2)=0$

$\lambda=\pm 2$

$\lambda=2$

$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad 3x_1-x_2=0 \quad x_1=\frac{1}{3}x_2 \quad \vec{v}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\lambda=-2$

$\begin{bmatrix} +1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad x_1+x_2=0 \quad x_1=-x_2 \quad \vec{v}_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$ $\quad (-4-\lambda)(-5-\lambda)-6=0 \quad \lambda^2+9\lambda+20-6=0$

$\lambda^2+9\lambda+14=0$

$(\lambda+7)(\lambda+2)=0$

$\lambda=-7,-2$

$\lambda=-7$

$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad 3x_1+x_2=0 \quad x_1=-\frac{1}{3}x_2 \quad \vec{v}_1=\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda=-2$

$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad -2x_1+x_2=0 \quad x_1=\frac{1}{2}x_2 \quad \vec{v}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad (-2-\lambda)(6-\lambda)+10=0 \quad \lambda^2-4\lambda-12+10=0$

$\lambda^2-4\lambda-2=0$

$\lambda=\dfrac{4\pm\sqrt{16+8}}{2}=\dfrac{4\pm 2\sqrt{6}}{2}=2\pm\sqrt{6}$

$\lambda=2+\sqrt{6}$

$\begin{bmatrix} -4-\sqrt{6} & 2 \\ -5 & 4-\sqrt{6} \end{bmatrix}$ $\quad -5x_1+(4-\sqrt{6})x_2=0 \quad x_1=\dfrac{4-\sqrt{6}}{5}x_2$

$\vec{v}_1=\begin{bmatrix} 4-\sqrt{6} \\ 5 \end{bmatrix} \quad \vec{v}_2=\begin{bmatrix} 4+\sqrt{6} \\ 5 \end{bmatrix}$

1e. $\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$ $(2-\lambda)(10-\lambda)-9=0$ $\lambda^2-12\lambda+11=0$

$\lambda^2-12\lambda+20-9=0$ $(\lambda-11)(\lambda-1)=0$

$\lambda=11,1$

$\lambda_1=11$

$\begin{bmatrix} -9 & 9 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $x_1-x_2=0$ $\vec{v}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x_1=x_2$

$\lambda_2=1$

$\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$ $x_1+9x_2=0$ $\vec{v}_2=\begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x_1=-9x_2$

f. $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ $(-2-\lambda)(-\lambda)-35=0$ $(\lambda+7)(\lambda-5)=0$

$\lambda^2+2\lambda-35=0$ $\lambda=-7,5$

$\lambda_1=-7$

$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$ $5x_1+5x_2=0$ $\vec{v}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x_1=-x_2$

$\lambda_2=5$

$\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$ $7x_1-5x_2=0$ $\vec{v}_2=\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

$x_1=\frac{5}{7}x_2$

g. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ $(3-\lambda)(3-\lambda)+4=0$ $\lambda^2-6\lambda+13=0$

$\lambda^2-6\lambda+9+4=0$ $\lambda=\frac{6\pm\sqrt{36-52}}{2}=\frac{6\pm4i}{2}=3\pm2i$

$\lambda=3+2i$

$\begin{bmatrix} 3-(3+2i) & -2 \\ 2 & 3-(3+2i) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{bmatrix}$ $2x_1-2ix_2=0$ $\vec{v}_1=\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{v}_2=\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$

$x_1=ix_2$

h. $\begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $(-2-\lambda)[(2-\lambda)(2-\lambda)-4]=0$ $(-2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda)=0$

$(-2-\lambda)[\lambda^2-4\lambda+4-4]=0$ $\lambda=-2$ $\lambda=0,$ $\lambda=4$

$\lambda=-2$

$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\vec{v}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_2=0$

$\begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -13/2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $x_1=13/2\,x_3$ $\vec{v}_2=\begin{bmatrix} 13 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$x_2=2x_3$

11h cont'd

$\lambda = 4$

$$\begin{bmatrix} -6 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7/6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x_1 = -7/6\, x_3 \\ x_2 = -2x_3 \end{matrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -7 \\ -12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

i. $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$ $\quad (4-\lambda)(11-\lambda)-30=0$ $\quad \lambda^2-15\lambda+14=0$ $\quad \lambda = 14, 1$

$\lambda^2-15\lambda+44-30=0$ $\quad (\lambda-14)(\lambda-1)=0$

$\lambda_1 = 14$

$\begin{bmatrix} -10 & 5 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad 6x_1-3x_2=0$ $\quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$x_1 = \frac{1}{2}x_2$

$\lambda_2 = 1$

$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$ $\quad 3x_1+5x_2=0$ $\quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

$x_1 = -\frac{5}{3}x_2$

j. $\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad (-3-\lambda)(-1-\lambda)-35=0$ $\quad \lambda^2+4\lambda-32=0$

$\lambda^2+4\lambda+3-35=0$ $\quad (\lambda+8)(\lambda-4)=0$

$\lambda = -8, 4$

$\lambda = -8$

$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ $\quad 5x_1+7x_2=0$ $\quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -7 \\ 5 \end{bmatrix}$

$x_1 = -\frac{7}{5}x_2$

$\lambda = 4$

$\begin{bmatrix} -7 & 7 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$ $\quad 5x_1-5x_2=0$ $\quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$x_1 = x_2$

k. $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$ $\quad (-4-\lambda)(-4-\lambda)+25=0$ $\quad \lambda^2+8\lambda+41=0$

$\lambda^2+8\lambda+16+25=0$

$$\lambda = \frac{-8 \pm \sqrt{64-164}}{2} = \frac{-8 \pm 10i}{2} = -4 \pm 5i$$

$\lambda = -4+5i$

$$\begin{bmatrix} -4-(-4+5i) & 5 \\ -5 & -4-(-4+5i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5i & 5 \\ -5 & -5i \end{bmatrix}$$

$-5x_1 - 5ix_2 = 0$ $\quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$

$x_1 = -ix_2$

2.a. $e^{1+2i} = e^1 e^{2i} = e\cos 2 + ie\sin 2$

b. $2^{1-i} = 2^1 2^{-i} = 2e^{-(\ln 2)i} = 2\cos(\ln 2) + i2\sin(-\ln 2)$

c. $e^{2-\pi/2 i} = e^2 e^{-\pi/2} = e^2\cos(-\pi/2) + e^2 i\sin(-\pi/2)$

$= e^2(0) - e^2 i = -e^2 i$

3a. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}\vec{x}$ $\quad (1-\lambda)(-4-\lambda)+6=0$ $\quad \lambda^2+3\lambda-4+6=0$

$\lambda^2+3\lambda+2=0$

$(\lambda+2)(\lambda+1)=0$

$\lambda=-2,-1$

$\lambda_1=-2$

$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ $\quad 3x_1-2x_2=0$ $\quad x_1=\frac{2}{3}x_2$ $\quad \vec{v}_1=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\lambda=-1$

$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad 3x_1-3x_2=0$ $\quad x_1=x_2$ $\quad \vec{v}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{x}=c_1\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}e^{-2t}+c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-t}$

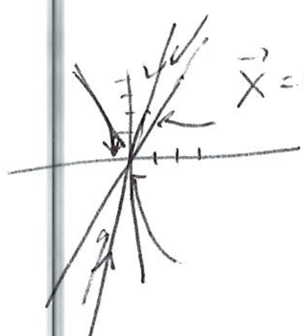
b. $t\vec{x}' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}\vec{x}$ $\quad (4-\lambda)(-6-\lambda)+24=0$ $\quad \lambda^2+2\lambda-24+24=0$

$\lambda^2+2\lambda=0$

$\lambda(\lambda+2)=0$ $\quad \lambda=0,-2$

$\lambda=0$

$4x_1-3x_2=0$ $\quad x_1=\frac{3}{4}x_2$ $\quad \vec{v}_1=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$



$\vec{x}=c_1\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}t^{-2}$

$\lambda=-2$

$\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$ $\quad 8x_1-4x_2=0$ $\quad x_1=\frac{1}{2}x_2$ $\quad \vec{v}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

c. $\vec{x}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}\vec{x}$ $\quad (-2-\lambda)(2-\lambda)+8=0$ $\quad \lambda^2-4+8=0$

$\lambda^2+4=0$

$\lambda=\pm 2i$

$\lambda_1=2i$

$\begin{bmatrix} -2-2i & 1 \\ -8 & 2-2i \end{bmatrix}$ $\quad -8x_1+(2-2i)x_2=$ $\quad x_1=\frac{1-i}{4}x_2$ $\quad \vec{v}_1=\begin{bmatrix} 1-i \\ 4 \end{bmatrix}$

$e^{2ti}=\cos 2t+i\sin 2t$

$\begin{bmatrix} 1-i \\ 4 \end{bmatrix}(\cos 2t+i\sin 2t) = \begin{bmatrix} \cos 2t+\sin 2t+i\sin 2t-i\cos 2t \\ 4\cos 2t+4i\sin 2t \end{bmatrix}$

Stable. orbit

$\vec{x}=c_1\begin{bmatrix} \cos 2t+\sin 2t \\ 4\cos 2t \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} \sin 2t-\cos 2t \\ 4\sin 2t \end{bmatrix}$